

Funções Trigonométricas de Dois Ângulos

Objetivos desse Capítulo

1. Derivar fórmulas para a soma e a diferença dos senos e cossenos usando o Maple
2. Pesquisar as fórmulas de dois ângulos usando Maple

Comandos Maple Usados Nesse Capítulo

<code>evalc</code>	Avalia um número complexo
<code>expand</code>	Expande uma expressão trigonométrica
<code>plot(expr, x = 0..2, numpoints=500)</code> <code>numpoints</code>	Constrói uma curva usando a opção <code>numpoints</code>
<code>simplify(expr)</code>	Atende uma simplificação
<code>subs</code> equação	Substitui valores em uma expressão ou equação

Introdução

Dados dois ângulos, não existe dificuldade em avaliar as funções trigonométricas para a soma desses ângulos. Se os ângulos dados forem 30° e 15° e você quiser a tangente da soma, você pode adicionar os ângulos e encontrar a tangente. Os ângulos 30° e 15° somam 45° e a $\tan(45^\circ) = 1$.

Similarmente, encontrar a diferença de dois ângulos dados não demonstra nenhum problema. Se você precisa determinar o seno da diferença entre 30° e 15° , subtraia os dois ângulos e use o Maple para detectar a função seno. Já que $30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$, $\sin(15^\circ) = \frac{1}{4}\sqrt{6}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$.

A situação muda se os ângulos são indeterminados. O propósito desse capítulo é revelar algumas fórmulas úteis para a soma, diferença e o produto de dois ângulos. Essas fórmulas são úteis porque fornecem uma maneira prática de expressar resultados particulares.

Fórmulas Trigonométricas para Dois Ângulos

A aproximação mais direta para encontrar fórmulas para a soma e a diferença de dois ângulos é desenhar um diagrama contendo os dois ângulos α e β , e tentar encontrar alguma relação entre eles desenhando linhas de construção. Na Figura 8.1, o triângulo BON contém o ângulo α , e o triângulo $(\Delta) AOB$ contém $\angle\beta$. Primeiramente, construa ΔBON ; então desenhe a linha $BA \perp OB$. Estenda o raio OA até ele interceptar BA , formando ΔAOB , o qual contém o ângulo β no vértice. Isso torna ΔOBA um triângulo reto. As linhas de construção AM , BN e BD são desenhadas para formar mais triângulos. A linha BD é perpendicular a AM .

A análise continua encontrando as relações entre os triângulos. A característica essencial dessa derivação, ou se você preferir contruir a linha AB perpendicular linha OB . Quem poderia pensar de tal forma? Apenas alguém que tivesse uma idéia difícil sobre o problema! Mas uma vez que você descobriu um problema, você pode tirar proveito dele. A aproximação neste livro é para definir ângulos usando a unidade círculo, nos casos em que a hipotenusa tem sempre o mesmo comprimento.

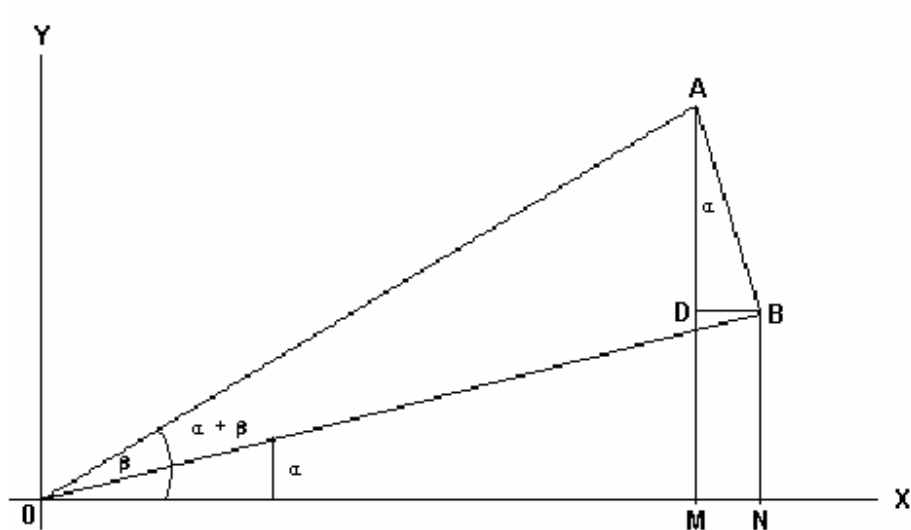


Figura 8.1 Diagrama para a Soma e a Diferença de Dois Ângulos

Isto é freqüentemente conveniente, mas não é uma necessidade. A derivação aqui significa escolher que OA seja maior do que OB por ter a linha AB .

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AM}{OA} = \frac{AD + DM}{OA} = \frac{AD + BN}{OA} \quad (8-1)$$

$$\frac{AD + BN}{OA} = \frac{AD}{OA} + \frac{BN}{OA} = \frac{AD}{AB} \frac{AB}{OA} + \frac{BN}{OB} \frac{OB}{OA} \quad (8-2)$$

$$= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (8-3)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OM}{OA} = \frac{ON - MN}{OA} = \frac{ON - BD}{OA} \quad (8-4)$$

$$ON - \frac{BD}{OA} = \frac{ON}{OA} - \frac{BD}{OA} = \frac{ON}{OB} \frac{OB}{OA} - \frac{BD}{AB} \frac{AB}{OA} \quad (8-5)$$

$$= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (8-6)$$

Para derivar a fórmula coseno, nós usamos o fato de que $\angle BAD = \alpha$. A prova é como segue: $\angle OBD = \alpha$, desde que BD seja paralela a ON . Já que nós fizemos $\angle OBA$ ser um ângulo reto $\angle DBA = 90^\circ - \alpha$; portanto, $\angle BAD = \alpha$.

Método Dois

Desta vez nós iremos desenhar os dois ângulos em uma unidade círculo. A aproximação é baseada na geometria analítica. O ponto final do lado terminal para um ângulo α é A . As coordenadas de A são $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, já que o lado terminal é o raio da unidade de círculo. O ponto B tem coordenadas $(\cos(\beta), \sin(\beta))$, assim, também, é o ponto final do raio da unidade de círculo. Existem dois problemas desta vez. Um é focalizar o comprimento do seguimento de linha AB . O outro é entender que o triângulo OAB na Figura 8.2(a) pode ser girado para que OB permaneça ao longo do eixo de x , como mostra a Figura 8.2(b).

$$AB = \sqrt{(\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha) - \sin(\beta))^2} \quad (8 - 7)$$

$>(\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha) - \sin(\beta))^2$;

$$(\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\sin(\alpha) - \sin(\beta))^2$$

Nós não precisamos tirar a raiz quadrada. A raiz do comprimento trabalha melhor aqui. Primeiro, nós iremos expandir a expressão, a qual é AB^2 , e simplificar.

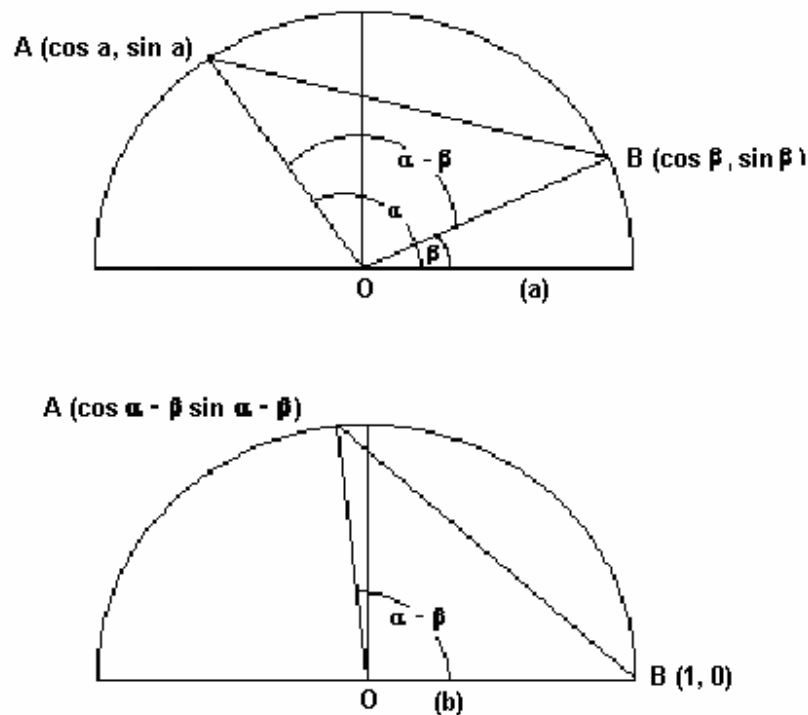


Figura 8.2 Encontrando $\cos(\alpha - \beta)$ pelo Método do Diagrama de Rotação

```
> expand( (cos(alpha)-cos(beta) )^2 + (sin(alpha) - sin(beta) )^2);
```

$$\cos^2(\alpha) - 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha) - 2 \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin^2(\beta)$$

```
> simplify(expand( (cos(alpha) - cos(beta) ) ^2 + ( sin(alpha) - sin(beta) ) ^2);
```

$$- 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) + 2 - 2 \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Aqui, o Maple usou o fato de que $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$. Nós podemos ter feito tudo isso em uma linha de entrada do Maple por *expand*, e depois *simplify*, ao redor da nossa primeira expressão. O passo pode ser feito em sucessão pela execução do comando, observando o resultado, então editando o comando para produzir o próximo passo. Dessa forma, você verifica o seu trabalho. Se você preferir usar as três linhas separadas, como nós temos feito aqui, você ainda irá usar a técnica de copie e cole. Tenha certeza de que você obteve a primeira linha de entrada correta verificando a saída de dados maple formatada. Copie o comando e cole em uma nova linha de entrada; depois

edite-a adicionando o comando *expand*. Copie aquela entrada, cole-a na próxima linha Maple, e edite-a adicionando o comando *simplify*. Agora você tem o resultado desejado para a primeira parte dessa derivação.

Agora, nós iremos aplicar a mesma fórmula da distância para o triângulo girado. A distância do triângulo para AB , como mostra a Figura 8.2(b), é:

$$Ab = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2} \quad (8 - 8)$$

Como antes, nós iremos trabalhar com a raiz do comprimento, AB^2 . Desta vez, nós iremos realizar o comando completo.

```
> simplify(expand( (cos(alpha - beta) - 1)^2 + (sin(alpha - beta) - 0)^2 ));
- 2 cos (α) cos(β) + 2 - 2 sin (α) sin(β)
```

Isso prova que as raízes do comprimento são exatamente as mesmas, o que confirma nossa expressão, mas isso não dá a identidade que nós estamos procurando. Nós queremos uma expressão envolvendo a diferença de ângulos. Neste ponto, por que não fazer o passo *expand* e ver o que acontece? o Maple expande muito para os nossos propósitos; então obtemos outro problema. Nós chamamos a diferença de dois ângulos de γ .

```
> e1 := subs(alpha - beta = gamma, (cos(alpha - beta) - 1) ^2 + (sin(alpha - beta) - 0) ^2);
e1 := (cos(γ) - 1)^2 + sin(γ)^2
```

```
> expand( e1 );
cos (γ)^2 = 2 cos (γ) + 1 + sin(γ)^2
```

Observe que a soma $\cos(\gamma)^2 + \sin(\gamma)^2$ aparece mais uma vez. Você vê porque precisa memorizar essa identidade? Nós podemos removê-la simplificando a expressão.

```
> ela := simplify(expand( e1 ));
ela := -2 cos(γ) + 2
```

Agora nós substituiremos para γ .

> subs(gamma = alpha - beta, ela);

$$-2 \cos(\alpha - \beta) + 2$$

Agora nós temos duas expressões diferentes para o mesmo comprimento de raiz, AB^2 .
Equacionando-as, nós encontramos:

$$-2 \cos(\alpha - \beta) + 2 = -2 \cos(\alpha) \cos(\beta) + 2 - 2 \sin(\alpha)$$

$$\sin(\beta) \quad (8 - 9)$$

Multiplique cada lado por -1 ; então adicione 2 e divida por 2 para obter:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (8 - 10)$$

Método Três

Esse método demonstra o famoso resultado da teoria dos números complexos. Aplicando as regras das exponenciais em $e^{i(\alpha+\beta)}$, temos a relação:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} \quad (8 - 11)$$

O grande resultado da análise complexa é:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (8 - 12)$$

onde i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Uma das maneiras de fazer o Maple trabalhar com expressões contendo a unidade imaginária é o comando *evalc*, o qual avalia uma expressão complexa da forma $a + ib$. No Maple, a unidade imaginária é designada por I ao invés de i .

>exp(I* (alpha + beta)) = expand(exp(I* (alpha + beta)));

$$e^{(I(\alpha + \beta))} = \cos(\alpha + \beta) + I \sin(\alpha + \beta) \quad (8 - 13)$$

No entanto:

>c1 := exp(I* (alpha + beta)) = expand(exp(I* (alpha + beta)));

$$c1 := e^{(I(\alpha + \beta))} = e^{(I\alpha)} e^{(I\beta)} \quad (8 - 14)$$

Nós podemos usar o Maple para escrever essa identidade na forma trigonométrica através do uso do *evalc*;

>evalc(c1);

$$\cos(\alpha + \beta) + I \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) + I \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (8 - 15)$$

Os números complexos são iguais se, e apenas se, suas partes reais são iguais e se as suas partes imaginárias são iguais também. Nós podemos equacionar as partes reais e imaginárias separadamente para obter as seguintes equações:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (8 - 6a)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (8 - 3a)$$

Esta talvez seja a derivação mais fácil de lembrar. Se você sabe como multiplicar números complexos e a forma trigonométrica de uma exponencial complexa, você pode derivar rapidamente as fórmulas de $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$, como mostram as Equações 8-6a e 8-3a.

Método Quatro

Depois de tentar esse método, você pode querer saber porque nós nos importamos com os outros!

Se você quiser expandir $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$, use o commando *expand* diretamente:

>cos(alpha + beta) = expand(cos(alpha + beta));

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (8 - 6b)$$

>sin(alpha + beta) = expand(sin(alpha + beta));

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \quad (8 - 3b)$$

Sumário dos Métodos

Nós derivamos algumas fórmulas de soma e diferença. Nós usamos uma aproximação geométrica no método de geometria analítica no método dois. O método três se baseia na teoria dos números complexos e o método quatro mostra que o Maple pode expandir somas de senos e cossenos. Por que nós mostramos diferentes métodos? Você pode aprender algo de cada um deles. O método um é a aproximação direta. Você poderia provavelmente desenhar um diagrama de um problema se pedissem a você para tentar e derivar uma fórmula de $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$. (Isso provavelmente poderia parecer como a Figura 8.1) Ela pode levar você a entender que a chave para o problema(usando essa aproximação) é fazer AB perpendicular a OB . Maple não ajuda no método um.

O método dois atende àqueles que pensam dinamicamente. Se você gosta de mover figuras ao longo da sua imaginação, o método da Figura 8.2 irá atender a você. Aí você vai ver que deve tirar uma aproximação algébrica. Uma das simplificações importantes é trabalhar com a raiz da extensão AB preferencialmente do que com a extensão AB por ela mesma. O Maple pode ajudar aqui, porque a reabilidade expande a fórmula de Pitágoras para a extensão entre dois pontos. Ele ajuda você a manter o curso da álgebra para que você possa aplicar o seu pensamento na lógica por

trás da derivação: de fato, você pode obter duas fórmulas, a Equação 8 – 7 e 8 – 8, para a mesma extensão AB . Disso, a expansão do $\cos(a - b)$ segue.

O método três é para aqueles que têm estudado a álgebra de números complexos. Quase sempre usa a alavanca para remover algo, mas se você conhece uma poderosa aproximação, porque não usá-la?

O método quatro é bom quando (a) você estudou os primeiros dois métodos para ver a derivação dos primeiros princípios, para que você entenda o que está envolvido, e (b) você tem o Maple nas mãos. Maple é maravilhoso para lembrar fórmulas. Deixe-o ajudar você a “pegar os sinais certos”, mas saiba que você tem que entender o processo!

Soma, Diferença e Fórmulas Produto

Nós iremos coletar as fórmulas trigonométricas padrão nessa seção para referência fácil. Em adição, nós iremos mostrar a você como fazer com que o Maple diga a você estes resultados.

>sin(alpha + beta) = expand(sin(alpha + beta));

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (8 - 16)$$

>sin(alpha - beta) = expand(sin(alpha - beta));

$$-\sin(-\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (8 - 17)$$

>cos(alpha + beta) = expand(cos(alpha + beta));

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (8 - 18)$$

>cos(alpha - beta) = expand(cos(alpha - beta));

$$\cos(-\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (8 - 19)$$

>tan(alpha + beta) = expand(tan(alpha + beta));

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)} \quad (8 - 20)$$

>tan(alpha - beta) = expand(tan(alpha - beta));

$$-\tan(-\alpha + \beta) = -\frac{-\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)} \quad (8 - 21)$$

Fórmulas de Ângulo Duplo

>sin(2*alpha) = expand(sin(2*alpha));

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (8 - 22)$$

>cos(2*alpha) = expand(cos(2*alpha));

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 \quad (8 - 23)$$

>tan(2*alpha) = expand(tan(2*alpha));

$$\tan(2\alpha) = 2 \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha)}{2 \cos^2(\alpha) - 1} \quad (8 - 24)$$

Lápis e Papel

LP – 1

Dados $\sin(\alpha) = \frac{2}{3}$ e $\cos(\beta) = \frac{3}{4}$, encontre:

(a) $\cos(\alpha)$

Resposta: _____

(b) $\sin(\beta)$

Resposta: _____

(c) $\sin(\alpha + \beta)$

Resposta: _____

(d) $\cos(\alpha + \beta)$

Resposta: _____

(e) $\tan(\alpha + \beta)$

Resposta: _____

LP – 2

Dados $\cos(\alpha) = \frac{20}{29}$ e $\sin(\beta) = \frac{28}{53}$, encontre:

(a) $\sin(\alpha)$

Resposta: _____

(b) $\cos(\beta)$

Resposta: _____

(c) $\sin(\alpha - \beta)$

Resposta: _____

(d) $\cos(\alpha - \beta)$

Resposta: _____

LP – 3

Expresse essas somas como produtos usando $2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$:

(a) $4 \sin(2x) \cos(x)$

Resposta: _____

(b) $2 \sin(\omega t) \cos(2\omega t)$

Resposta: _____

(c) $2 \sin(x) \cos(x)$

Resposta: _____

(d) $6 \sin(4x) \cos(3x)$

Resposta: _____

LP – 4

Expresse essas somas como produtos usando $\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)$:

(a) $\sin(2x) + \sin(x)$

Resposta: _____

(b) $\sin(x) - \sin(2x)$

Resposta: _____

(c) $\sin(3x) - \sin(2x)$

Resposta: _____

(d) $\sin(4x) - \sin(3x)$

Resposta: _____

(e) $\sin(\pi/4) - \sin(\pi/6)$

Resposta: _____

LP – 5

Prove as fórmulas dadas nos últimos dois problemas.

Laboratório Maple

LM – 1

Escreva o resultado dos seguintes comandos Maple. Decida quais são simplificações.

(a) `expand(sin(2*alpha + beta));` Resposta: _____

(b) `simplify(sin(pi/4) - sin(pi/6));` Resposta: _____

(c) `simplify(sin(x) - sin(2*x));` Resposta: _____

(d) `simplify(sin(x) + sin(2*x));` Resposta: _____

(e) `simplify(6*sin(4*x)* cos(3*x));` Resposta: _____

LM – 2: Prova das Identidades Trigonômétricas Fundamentais

Use a técnica de simplificar diferença dos lados esquerdo e direito da identidade proposta. Se o resultado é 0, você demonstrou que a equação original é uma identidade, no mínimo de acordo com o Maple!

Mostre que $\csc(x) = 1/\sin(x)$ é uma identidade. Isso é óbvio, porque é simplesmente a definição da função cosecante, mas ela ilustra o processo. Dê um nome à equação:

`>eq82 := csc(x) = 1/sin(x);`

$$\text{eq82} := \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

>simplify(lhs(eq82) -rhs(eq82));

0

O Maple diz que a diferença dos dois lados da equação é 0; então elas devem ser iguais. Teste as seguintes equações. Responda “verdadeiro” se a equação é uma identidade, e “falso” se não for. Observe que todos os problemas depois do primeiro envolvem funções trigonométricas de dois ângulos.

(a) >eq82a := sin(x)^2 + cos(x)^2 = 1;

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

(b) >eq82b := cos(u + v) = cos(u)*cos(v) – sin(u)*sin(v);

$$\text{eq82b} := \cos(u + v) = \cos(u) \cos(v) - \sin(u) \sin(v)$$

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

(c)

>eq82c := 2* sin(x)*cos(y) = sin(x + y) + sin(x – y);

$$\text{eq82c} := 2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x + y) - \sin(-x + y)$$

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

(d) >eq82d := 2* sin(x)*sin(y) = cos(x - y) - cos(x + y);

$$\text{eq82d} := 2 \sin(x) \sin(y) = \cos(-x + y) - \cos(x + y)$$

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

(e) >eq82e := 2* cos(x)*sin(y) = sin(x + y) - sin(x - y);

$$\text{eq82e} := 2 \cos(x) \sin(y) = \sin(x + y) + \sin(-x + y)$$

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

(f) >eq82f := 2* cos(x)*cos(y) = cos(x + y) + cos(x - y);

$$\text{eq82f} := 2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x + y) + \cos(-x + y)$$

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

(g) >eq82g := sin(x) + sin(y) = 2* cos((x - y)/2)* sin((x + y)/2);

$$\text{eq82g} := \sin(x) + \sin(y) = 2 \cos\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

(h)

$$\text{eq82h} := \sin(x) - \sin(y) = -2 \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \sin\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

(i) >eq82i := cos(x) + cos(y) = 2* cos((x + y)/2)* cos((x - y)/2);

$$\text{eq82i} := \cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \cos\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

(j) >eq82j := cos(x) - cos(y) = 2* cos((x + y)/2)* sin((x - y)/2);

$$\text{eq82j} := \cos(x) - \cos(y) = -2 \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \sin\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

>; (Escreva o comando maple aqui) _____

Resposta: _____

LM – 3

Considere as fórmulas:

$$\left| \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos(u)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(u)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1 - \cos(u)}{\sin(u)} = \frac{\sin(u)}{1 + \cos(u)}$$

(a) Construa os lados direito e esquerdo dessa equação sobre a extensão $-2\pi \leq u \leq 2\pi$. Se você vir uma única curva, sugere-se que você está lidando com uma identidade. Os lados direito e esquerdo têm gráficos idênticos para cada uma dessas equações?

>; (Escreva os comandos plot do Maple aqui)_____

Resposta:_____

(b) Use o Maple para demonstrar se essas equações são identidades. *Dica:* tire a raiz de cada lado, então simplifique a diferença.

>; (Escreva os comandos plot do Maple aqui, seguindo seus passos)_____

Resposta:_____

LM – 4: Modulação de Amplitude

Um sinal na estação AM do seu rádio é produzido por um sinal áudio na frequência carrier. (Isso é algo chamado ondas de rádio). A forma da onda de um tal sinal é dada pela fórmula:

$$\text{>eq84} := A * \sin(\omega_c * t) * \cos(\omega_a * t);$$
$$\text{eq84} := A \sin(\omega_c t) \cos(\omega_a t)$$

onde A é a amplitude da onda de rádio carrier, ω_c é a frequência angular da onda carrier (a estação de frequência designada na AM), e ω_a é a frequência angular do sinal de áudio. Na prática, a frequência carrier é mais ou menos 1,000 vezes mais rápida do que a frequência de áudio.

Nós iremos apresentar um exemplo onde a frequência carrier é apenas 10 vezes a frequência de áudio. Você verá porque, quando fizer o gráfico desse sinal.

(a) Substitua os valores, $A = 10$, $\omega_c = 100$ e $\omega_a = 10$ e nomeie a nova fórmula *eq84a*. Qual é o período, T , do sinal de áudio? (O período, $T = 1/f$ e $\omega = 2\pi f$).

$$\text{> eq84} := \text{subs}(A = 10, \omega_c = 100, \omega_a = 10, \text{eq84});$$
$$\text{eq84a} := 10 \sin(100t) \cos(10t)$$

Resposta: _____

(b) Quanto tempo leva para três ciclos completos da onda carrier? Use as fórmulas na parte (a).

Resposta: _____

(c) Construa a função para três ciclos da frequência de áudio. Com o que poderia parecer o gráfico se você usasse a frequência carrier de $\omega_c = 100$?

>; (Escreva o comando *plot* aqui)

Resposta: _____

(d) Rascunhe o plot. Você vê que a amplitude da onda carrier é modulada (feita grande ou pequena) pelo sinal de áudio?

Resposta: _____

Observe: Você pode tentar usar a opção `numpoints = 500` no comando `plot` para obter uma melhor figura.

Explorações

E8 – 1: Batidas

Suponha que a onda é dada pela equação

$$S = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t)$$

Examine o caso onde as duas frequências angulares, ω_1 e ω_2 , são quase, mas não com certeza, os mesmos. Defina *frequência average* como:

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

e uma *frequência de modulação* de:

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

Use as fórmulas definidas nesse capítulo para mostrar que:

$$S = A \cos(\omega_m t) \cos(\omega_s t)$$

Dica: use as Equações 8 – 18 e 8 – 19.

Aqui está um problema desafiador da teoria das vibrações mecânicas. Dados:

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n (2 - k\omega^2)$$

$$A_n = A \sin(kna)$$

Expresse A_{n+1} como $A \sin(k(n + 1) a)$ e A_{n-1} como $A \sin(k(n - 1) a)$. Simplifique essas expressões e substitua na primeira equação. Desde que A_{n+1} e A_{n-1} sejam dados como somas e diferenças de dois ângulos, use as fórmulas derivadas nesse capítulo para encontrar uma simples fórmula para ω^2 em termos de K e $\cos(ka)$.

Dica: o resultado que você está procurando para isso é $\omega^2 = 2K(1 - \cos(ka))$.